Die Reflexion einer Welle an einer Potentialschwelle

Von Heinz Koppe

Department of Physics, The University of British Columbia, Vancouver (Canada)

(Z. Naturforschg. 5a, 137—139 [1950]; eingegangen am 2. September 1949)

Durch eine Abänderung der WBK-Methode wird ein Näherungsausdruck für den Reflexionskoeffizienten R gefunden, der für kleines R gültig ist.

Die vorliegende Untersuchung befaßt sich mit folgendem Problem, das in verschiedenen Einkleidungen in der mathematischen Physik auftritt: Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\psi'' + p(x)^2 \psi = 0, \tag{1}$$

wobei $p^2 > 0$ für hinreichend positive (negative) Werte von x gleich p_1^2 (p_2^2) ist. Gesucht wird die Lösung von (1), die den Bedingungen

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{-i p_2 x}, \quad \text{für } x \to -\infty, \\ \psi &\to C_+ e^{+i p_1 x} + C_- e^{-i p_1 x}, \quad \text{für } x \to +\infty \end{aligned} \tag{2}$$

genügt; dabei kommt es aber weniger auf den Gesamtverlauf von ψ an, als vor allem auf die Kenntnis des Reflexionskoeffizienten R und des Durchlässigkeitskoeffizienten D, die gegeben sind durch

$$R = \left|\frac{C_+}{C_-}\right|^2; \quad D = \frac{p_2}{P_1} \frac{1}{|C_-|^2}, \tag{3}$$

und zwischen denen die Beziehung

$$R + D = 1 \tag{4}$$

besteht.

Die Lösung (2) entspricht der Reflexion einer von rechts nach links gegen die Potentialschwelle laufenden Welle mit der anfänglichen Amplitude C_-. Die in (2) eingeführte Normierung stellt zwar den physikalischen Sachverhalt auf den Kopf, ist aber mathematisch viel symmetrischer und den folgenden Rechnungen besser angepaßt. — Gl. (4) erhält man, wenn man die Wronskische Determinante W aus den beiden linear unabhängigen Lösungen ψ und ψ^* bildet und berücksichtigt, daß für Differentialgleichungen vom Typ (1) W konstant ist.

Das hiermit gestellte Problem ist schon vielfach behandelt worden[1], und hat sich im allgemeinen als recht spröde erwiesen. Besonders gilt das für einen glatten, analytischen Verlauf von p^2; hier haben sich nur für ganz bestimmte Funktionen Lösungen angeben lassen. Andererseits ist die Gl. (1) für eine numerische Behandlung so unbequem wie möglich, da man es mit einer rasch oszillierenden Funktion zu tun hat.

Im folgenden soll eine einfache Näherungsformel abgeleitet werden, die unter der Voraussetzung gilt, daß $R \ll 1$, also nur eine schwache Reflexion auftritt. (Der Fehler ist von der Größenordnung R^2.) Sie wird dadurch erhalten, daß (1) durch eine Ricattische Differentialgleichung ersetzt wird, die sich leicht näherungsweise lösen läßt. Ein ähnliches Verfahren zur Behandlung von Gleichungen vom Typ (1) ist unter der Bezeichnung „WBK-Methode" schon lange bekannt, ebenso bekannt ist allerdings, daß diese Methode gerade bei der Berechnung der Reflexionskoeffizienten für analytisches p^2 versagt, indem sie immer $R = 0$ liefert. Sie muß also einen grundsätzlichen Fehler enthalten, der im folgenden aufgezeigt wird, und den man mit der hier entwickelten Methode vermeiden kann.

Man kann in bekannter Weise von (1) zu einer Riccatischen Differentialgleichung gelangen, wenn man den Ansatz

$$\psi' = y\,\psi \tag{5}$$

macht. Es ergibt sich dann für y eine Differentialgleichung 1. Ordnung und 2. Grades

$$y' + y^2 + p(x)^2 = 0. \tag{6}$$

Bei der WBK-Methode betrachtet man nun y' als sehr klein und vernachlässigt es in erster Näherung; genauer gesagt, man ersetzt (6) durch

$$\lambda y' + y^2 + p(x)^2 = 0 \tag{6'}$$

und setzt y formal als Potenzreihe nach λ an:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n. \tag{7}$$

[1] Vgl. den Bericht von W. Kofink, Ann. Physik (6) 1, 119 [1947] und weiterhin z. B. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Bd. 2, 2. Aufl., Braunschweig 1939, S. 29; M. Born, Optik, Berlin 1933, S. 36.

Setzt man (7) in (6) ein und vergleicht die verschiedenen Potenzen von λ, so ergibt sich $y_0 = \pm i p$, und für die weiteren y_n ergeben sich Rekursionsformeln[2], nach denen sie sich der Reihe nach berechnen lassen. Man begnügt sich dann im allgemeinen mit y_0 und y_1 und nimmt an, daß $y_0 + y_1$ in irgendeinem Sinne eine Näherungslösung von (6) ist.

Natürlich ist das ganze Verfahren rein formal und braucht nicht zu irgendwie sinnvollen Resultaten zu führen. Zunächst erhält man nur zwei verschiedene Lösungen der Gl. (6), je nachdem man von $y_0 = i p$ oder $y_0 = - i p$ ausgeht, während die allgemeine Lösung eine willkürliche Integrationskonstante enthalten muß. Wenn die beiden Lösungen (7) einen Sinn haben, dann müssen sie zwei ausgezeichnete Lösungen von (6) darstellen, und zwar wird sich zeigen, daß es die beiden Lösungen sind, für die y' von der Größenordnung p' ist. Wir werden nun zeigen, daß diese Bedingung erstens nicht allgemein für alle Lösungen gilt, und zweitens, daß es im Falle einer endlichen Reflexion keine Lösung gibt, für die $|y'| \sim |p'|$ überall gilt. In Wirklichkeit ist diese Bedingung nämlich gerade nur dann erfüllt, wenn keine reflektierte Welle vorhanden ist, und es ist deshalb kein Wunder, daß die WBK-Methode den Reflexionskoeffizienten Null liefert.

Um diese beiden Behauptungen einzusehen, gehen wir zunächst einmal vom einfachsten Fall aus, indem wir $p^2 = \text{const}$ setzen. Die WBK-Methode liefert dann

$$y = - i p \;\; (\text{bzw. } y = + i p)\,. \tag{8}$$

Das ist tatsächlich eine Lösung von (6), und es ist $y' = 0$ entsprechend $p' = 0$. Man kann aber in diesem Falle sofort die allgemeinste Lösung von (6) für $p = \text{const}$ hinschreiben, da die entsprechende Lösung von (1) bekannt ist:

$$y = - i p \, \frac{A e^{-ipx} - B e^{+ipx}}{A e^{-ipx} + B e^{+ipx}} = - i p \, \frac{1 - B/A \cdot e^{2ipx}}{1 + B/A \cdot e^{2ipx}}\,. \tag{9}$$

Das ist mit (8) identisch, sobald man $B/A = 0$ setzt, solange also keine von links nach rechts laufende Welle vorhanden ist. Andererseits ist, sobald $B/A \neq 0$ ist, $|y'| = |2 p^2 B/A|$, also nicht von der Ordnung p'.

Im allgemeinen Fall ist nun

$$y \to - i p_2\,, \qquad \text{für } x \to -\infty$$

$$y \to - i p_1 \, \frac{1 - C_+/C_- \, e^{2 i p_1 x}}{1 - C_+/C_- \, e^{2 i p_1 x}}\,, \qquad \text{für } x \to +\infty\,. \tag{10}$$

Für $x \to +\infty$ ist also die Bedingung für die Brauchbarkeit der WBK-Methode nicht mehr erfüllt. Die hier durchgeführte Überlegung legt aber einen Ausweg nahe: man macht den Ansatz

$$y = - i p(x) \, \frac{1 - v(x)}{1 + v(x)}\,, \tag{11}$$

mittelst dessen man y durch eine neue Funktion v darstellt, für die sich wieder eine Riccatische Differentialgleichung ergibt:

$$v' - 2 i p v = \frac{1}{2} (1 - v^2) \frac{p'}{p}\,. \tag{12}$$

Aus (10) folgt nun, daß $v(x)$ erstens der Anfangsbedingung $v = 0$ für $x = -\infty$ zu unterwerfen ist, und daß sich zweitens ergeben muß, daß für $x = \infty$ sich $v(x)$ wie $\text{const} \cdot e^{2 i p_1 x}$ verhält. Ein Vergleich mit (3) zeigt dann unmittelbar, daß

$$R = \lim_{x \to \infty} |v|^2\,. \tag{13}$$

Um die zweite Behauptung nachzuprüfen, betrachten wir zunächst die rechte Seite von (12) als gegebene Funktion von x. Dann ist

$$v(x) = \frac{1}{2} \exp\left(2 i \int_\infty^x p(t)\, dt\right) \cdot \int_{-\infty}^x \frac{p'(t)}{p(t)} [1 - v^2(t)] \exp\left(-2 i \int_\infty^t p(t)\, dt\right) dt\,. \tag{14}$$

Da nun p' nur in einem endlichen Intervall wesentlich von Null verschieden ist, geht das Integral für $x \to \infty$ nach einer Konstanten, wie es verlangt worden war. Natürlich stellt (14) noch keine explizite Lösung dar, da ja v auch auf der rechten Seite vorkommt; man kann aber v aus (14) durch sukzessive Approximationen bestimmen. Außerdem ist zu erwarten, und darauf wollen wir uns hier beschränken, daß man für schwache Reflexion in (14) rechts v^2 vernachlässigen kann. Dann erhält man:

$$R_0 = \frac{1}{4} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2 i \int_\infty^x p(t)\, dt\right) d \log p(x) \right|^2\,, \tag{15}$$

und das ist die angekündigte Näherungsformel. Das Integral ist dabei absichtlich als Stieltjes-Integral geschrieben, um zu zeigen, daß es auf die Stetigkeit von p nicht ankommt. Wir zeigen das gleich am Beispiel eines Potentialsprunges; es sei also $p = p_1$, für $x > 0$ und $p = p_2$ für $x < 0$. Dann ist nach (14)

[2] Vgl. A. Sommerfeld[1], S. 707.

$$R_0 = \frac{1}{4} \left| \log p_1 - \log p_2 \right|^2 \sim \frac{1}{4} \frac{(p_1 - p_2)^2}{p_2^2}, \quad (16)$$

und das stimmt für kleines R bis auf einen Fehler von der Größenordnung R^2 mit dem exakten Wert

$$R = \frac{(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2} \quad (16')$$

überein.

Es gibt eine einfache anschauliche Deutung der Beziehung (15). Man erhält sie nämlich unmittelbar, wenn man den Potentialverlauf durch eine Treppenkurve approximiert und sowohl die Schwächung des primären Strahls als auch die mehrfache Reflexion vernachlässigt. Die Funktion $p(x)$ sei also eine Treppenkurve, die an den Stellen x_n sehr kleine Sprünge p_n macht. Gegen diese Potentialtreppe läuft von links eine Welle $e^{-i p_1 x}$. An jeder Stufe wird eine rückläufige Welle mit der Amplitude $1/2\, \Delta p/p$ abgespalten. Die Intensität des reflektierten Strahles ist das Absolutquadrat der Summe aller Teilwellen an einem Punkte x_0 genügend weit rechts. Man muß nur berücksichtigen, daß diese Wellen untereinander Phasendifferenzen haben, die gleich dem doppelten Lichtweg von x_0 bis x_n sind. Dieser ist gleich

$$S(x_0, x_n) = \int_{x_0}^{x_n} p(x)\, dx ;$$

und folglich ist

$$R = \left| \sum_n \frac{1}{2} \frac{\Delta p_n}{p_n} \exp\left(-2\, i\, S(x_0, x_n)\right) \right|^2 .$$

Geht man zur Grenze sehr vieler sehr kleiner Sprünge über, so konvergiert die Summe bis auf einen belanglosen Faktor vom Betrage 1 gegen das Integral in (15). Diese Ableitung ist deshalb wesentlich, weil sie zu dem physikalisch befriedigenden Ergebnis führt, daß es keine Rolle spielt, ob $p(x)$ analytisch ist oder nicht, und daß eine analytische Funktion und eine Treppenfunktion denselben Reflexionskoeffizienten liefern, wenn sie nur hinreichend gut im Gesamtverlauf übereinstimmen.

Zur Genauigkeitssteigerung optischer Messungen durch Minimumstrahlkennzeichnung

Von Hans Wolter

Aus dem Institut für Experimentalphysik der Universität Kiel

(Z. Naturforschg. **5a**, 139—143 [1950]; eingegangen am 5. April 1949)

Die prinzipielle Unschärfe eines Lichtstrahls kann überwunden werden, wenn auf die Energiekonzentration verzichtet wird. Eine Ebene im Raum kann durch geeignete Minima oder schwache Maxima prinzipiell beliebig genau gekennzeichnet werden; praktisch bedingen Störlicht (Streulicht, Inkohärenz u. a.) oder Mängel der Optik die Grenze. Eine Genauigkeitssteigerung um den Faktor 25 gelingt mit einfachen Mitteln.

Die Anwendung beschränkt sich nicht auf die Kennzeichnung einer Ebene oder unmittelbar verwandte Probleme (Strahlversetzung bei Totalreflexion, Lichtzeigergeräte u. ä.); die Minimumstrahlkennzeichnung führt auch zu einer Verbesserung der Schlierenverfahren und ist auf spektroskopische und mikroskopische Untersuchungen anwendbar. Ferner kann man den „Weg des Lichtes" als geometrischen Ort der Minima definieren und so diesem Begriff einen experimentell greifbaren und theoretisch streng erfaßbaren Sinn geben.

1. Die Unschärfe

In der Wellenoptik bezeichnet man mit dem Worte „Strahl" ein Wellenbündel. Dies habe in einem seiner Querschnitte die flächenhafte Ausdehnung $\delta f = \delta x\, \delta y$ und die Winkelstreuung $\delta\omega = \delta\alpha_x\, \delta\alpha_y$. Die Unschärfebedingung

$$\delta x\, \delta\alpha_x \geq \lambda ; \quad \delta y\, \delta\alpha_y \geq \lambda , \quad (1)$$

die der Heisenbergschen analog ist, zeigt die Unmöglichkeit, Winkelstreuung und Strahlbreite zugleich beliebig klein zu machen. Gleichung (1) gilt nur für kleine Winkel; allgemein benutzt man zweckmäßig die „Richtvariable"

$$\gamma = \frac{\sin\alpha}{\lambda} . \quad (2)$$

Mit ihr lautet die Unschärfebedingung

$$\delta x\, \delta\gamma \geq 1 . \quad (3)$$

Die reine Zahl $\delta x\, \delta\gamma$ benutzen wir als quantitatives Maß der „Unschärfe", das Reziproke bezeichnen wir als „Schärfe" g.